28/11/2016

Ορια συναρτήσεων·

Ορισμος

Εστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$
Το x_0 λέγεται σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ (*).

$$\left(A \cap \left((x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)\right)\right) \neq \emptyset.$$

Λέμε ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν το A δεν είναι άνω φραγμένο

Λέμε ότι το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο.

Παραδειγματα

1) $A=[a,b]$ Το συνολο των σ.σ. του A ειναι το $[a,b]$

2) $A=(a,b)$ Το συνολο των σσ του A ειναι το $[a,b]$

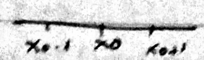
3) $A=[0,3)\cup\{5\}$ Το συνολο των σσ του A ειναι το $[0,3]$

4) $A=\mathbb{N}$ κανενας πραγματικος αριθμος δεν ειναι σσ του $A=\mathbb{N}$

Εστω $x_0\in\mathbb{R}$

α) Αν $x_0\in\mathbb{N}$. Για $\delta=1$

$A\cap((x_0-1,x_0)\cup(x_0,x_0+1))=\emptyset$



β) Αν $x_0\notin\mathbb{N}$

β1) Αν $n<x_0<n+1$ για καποιον n

Για $\delta=\min\{x_0-n,(n+1)-x_0\}$ η $(*)$ δεν ισχυει

β2) Αν $x_0<1$ για $\delta=1-x_0$ η $(*)$ δεν ισχυει.

Το $+\infty$ ειναι σσ του $\mathbb{N}$

Το $-\infty$ δεν ειναι σσ του $\mathbb{N}$

Παρατηρηση

Ενα σσ. x_0 του A μπορει να ανηκει η να μην ανηκει στο A

Ορισμος Εστω $A\subseteq\mathbb{R}$. Ενα $x_0\in A$ το οποιο δεν ειναι σημειο συσσωρευσης του A λεγεται μεμονωμενο σημειο του A
($\Leftrightarrow \exists\,\delta>0$ $A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x_0\}$)

Παρ.

1) Για $A = [0,3) \cup \{5\}$ το 5 είναι μεμονωμένο σημείο του A

2) Για $A = \mathbb{N}$ κάθε $n \in A$ είναι μεμονωμένο σημείο του A

<u>Πρόταση</u> Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$

Τ.Α.Ε.Ι (i) Το x_0 είναι σσ. του A

(ii) $\forall \delta > 0$ το σύνολο $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ περιέχει άπειρα σημεία

(iii) Υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A με $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x_0$

Αποδ.

(i) ⇒ (ii) Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι το (ii) δεν ισχύει.

Τότε $\exists \delta_1 > 0$ ώστε το $A \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ να είναι πεπερασμένο

Τα σημεία του παραπάνω συνόλου εκτός του x_0 (αν ανήκει το x_0) σχηματίζουν ένα πεπερασμένο σύνολο $\{y_1, \dots, y_n\}$

Θέτοντας $\delta = \min\{|y_i - x_0| \ i = 1, \dots, n\}$

Τότε $A \cap (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \emptyset$

Άτοπο

(ii) ⇒ (iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

το σύνολο $A \cap (x_0 - \frac{1}{n}, x_0) \cup (x_0, x_0 + \frac{1}{n})$ είναι μη κενό

Επιλέγουμε x_n

Τοτε $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$ $\forall n$ ενω $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ $\forall n$

Αρα $x_n \to x_0$

(iii) ⇒ (i) Εστω $\delta > 0$

Εφόσον $x_n \to x_0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_n - x_0| < \delta$ $\forall n \geq n_0$

Εφόσον $x_{n_0} \neq x_0$

$x_{n_0} \in A \cap (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

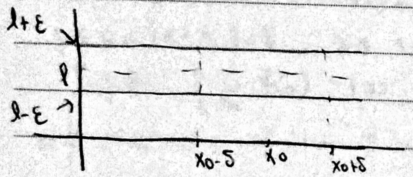
Αρα το συνολο αυτό είναι μη κενό

<u>Ορισμός</u>

Εστω $f: A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση (οπου $A \subseteq \mathbb{R}$) x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A και $l \in \mathbb{R}$. Λέμε οτι το όριο της f στο x_0 είναι ίσο με l αν

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχυει $|f(x) - l| < \varepsilon$

Συμβ. $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$



<u>Παρατήρηση</u>

Αν $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$

$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_1$

$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_2$

Τοτε $l_1 = l_2$

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε οτι $l_1 \neq l_2$

Θέτουμε $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$

Εφόσον $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_1$

$\exists \delta_1 > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta_1$ να ισχύει $|f(x) - l_1| < \varepsilon$ (1)

Εφόσον $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_2$

$\exists \delta_2 > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta_2$ να ισχύει $|f(x) - l_2| < \varepsilon$ (2)

Θέτω $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Εφόσον x_0 σ.σ του A

$\exists x_1 \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$

Για αυτό το x_1 $|f(x_1) - l_1| < \varepsilon$

$|f(x_1) - l_2| < \varepsilon$

Έτσι

$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - f(x_1)| + |f(x_1) - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |l_1 - l_2|$

άτοπο

Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να συμβολίσουμε το (μοναδικό) όριο της f καθώς το x τείνει το x_0 με $\lim_{x \to x_0} f(x)$

Παράδειγμα

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

Να δ.ο. $\lim_{x \to 5} f(x) = 25$

Έστω $\varepsilon > 0$

(Αναζητάμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow |x^2 - 25| < \varepsilon$)

Μπορούμε να επιλέξουμε το $\delta \leq 1$. Τότε για x με $|x - 5| < \delta \leq 1$ θα ισχύει $4 < x < 6$ άρα $9 < x + 5 < 11$.

$|x^2-25| = |x+5|\,|x-5|$
$< 11|x-5| < 11\delta$

Θέτοντας $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{11}\}$
έχουμε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$
με $0 < |x-5| < \delta$ ισχύει $|x^2-25| < \varepsilon$

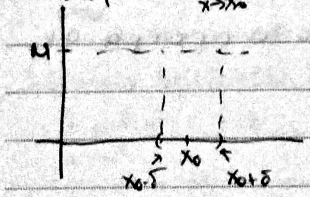
β) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 5 \\ 7 & x = 5 \end{cases}$$

Να δο. $\lim_{x\to 5} f(x) = 25$.

Αποδ. ίδια με πριν

Ορισμός
Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 σσ του A
α) Λέμε ότι η f τείνει στο $+\infty$ καθώς το x τείνει στο x_0 αν Για κάθε $M>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x-x_0| < \delta$ να ισχύει $f(x) > M$.
Συμβ. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.



β) Λέμε ότι η f τείνει στο $-\infty$ καθώς το x τείνει στο x_0 αν για κάθε $M>0$ $\exists\, \delta>0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x-x_0| < \delta$ να ισχύει. ~~[illegible]~~
$f(x) < -M$
Συμβ. $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Παράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{x^2} > M \\ \Leftrightarrow x \neq 0 \quad |x^2| < \frac{1}{M} \\ \Leftrightarrow x \neq 0 \\ \quad -\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}} \end{array} \right)$$

Να δο. $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

<u>Αποδ.</u>

Εστω $M > 0$

Θετω $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$

Για καθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x - 0| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$

ισχυει $\frac{1}{x^2} > M$.

Ομοιως $\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$

<u>Ορισμος</u> Εστω $A \subseteq \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$.

α) Λεμε οτι το x_0 ειναι σσ του A απο τα δεξια αν $\forall \delta > 0$ $A \cap (x_0, x_0 + \delta) \neq \emptyset$

β) Λεμε οτι το x_0 ειναι σσ του A απο τα αριστερα αν, $\forall \delta > 0$ $A \cap (x_0 - \delta, x_0) \neq \emptyset$

Παραδ.

Α, $A = [2,4]$ ή $A = (2,4)$

Το 4 ειναι σσ του A απο τα αριστερα αλλα δεν ειναι σσ απο τα δεξια

Το 2 ειναι σσ του A απο τα δεξια αλλα δεν ειναι σσ του A απο τα αριστερα

Αν $x_0 \in (2,4)$

Το x_0 ειναι σσ του A απο τα δεξια και απο τα αριστερα.

Παρατήρηση

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ x_0 σ.σ. του A $\Leftrightarrow$

x_0 σ.σ. του A από τα δεξιά

ή

x_0 σ.σ του A από τα αριστερά

Ορισμός (πλευρικά όρια)

Εστω $A \subseteq \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

α) Αν x_0 σ.σ του A από τα δεξιά και $\ell \in \mathbb{R}$ λέμε ότι το όριο της f στο x_0 από τα δεξιά ισούται με ℓ.

αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$

ώστε $\forall x \in A$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

β) Αν x_0 σ.σ. του A από τα αριστερά και $\ell \in \mathbb{R}$ λέμε ότι το όριο της f στο x_0 από τα αριστερα ισούται με ℓ.

αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ ώστε $\forall x \in A$ $x_0 - \delta < x < x_0$ ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

Ομοίως ορίζονται

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

ή

$-\infty$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

ή

$-\infty$